Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2015

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	19.08.2015	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. **a)** Ein Experiment ergibt die folgenden Messungen für die unbekannten Grössen x_1, x_2, x_3 und x_4:

$x_1 - x_3$	$x_4 + 3x_3$	$2x_2 - x_1$	$x_1 + x_2 - 2x_3$	$x_3 + x_4$	x_2
4	1	-3	5	-9	7

Die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 sollen durch Ausgleichsrechnung bestimmen werden. Stellen Sie zu diesen Daten die Fehlergleichungen auf und bestimmen Sie die zugehörige Matrix A und den Vektor b, so dass sich das Ausgleichsproblem als

$$Ax = b$$

schreiben lässt.
Hinweis: Sie müssen dieses Ausgleichsproblem nicht lösen.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem

$$Ax = b,$$

für

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Hinweis: Eine mögliche Matrix Q für die QR-Zerlegung ist gegeben als

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

a) $A_{(1)}^T A_{(2)} \overset{!}{=} 0 : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0$ ✓

$A_{(1)}^T A_{(3)} \overset{!}{=} 0 : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} = 1 + 4 - 5 = 0$ ✓

$A_{(2)}^T A_{(3)} \overset{!}{=} 0 : \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} = 3 - 8 + 5 = 0$ ✓

b) Orthogonalität impliziert <u>direkt</u> lineare Unabhängigkeit.

Trotzdem Beweis:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -5 \end{matrix} \overset{G.}{\rightarrow} \begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & -6 \end{matrix} \overset{G.}{\rightarrow} \begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{42}{5} \end{matrix} \rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$$

$\Rightarrow$ Spaltenvektoren lin. unabh.

c) $$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{5}{\sqrt{42}} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{42} \end{bmatrix}$$

2. a) Ein Experiment ergibt die folgenden Messungen für die unbekannten Grössen x_1, x_2, x_3 und x_4:

$x_1 - x_3$	$x_4 + 3x_3$	$2x_2 - x_1$	$x_1 + x_2 - 2x_3$	$x_3 + x_4$	x_2
4	1	-3	5	-9	7

Die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 sollen durch Ausgleichsrechnung bestimmen werden. Stellen Sie zu diesen Daten die Fehlergleichungen auf und bestimmen Sie die zugehörige Matrix A und den Vektor b, so dass sich das Ausgleichsproblem als

$$Ax = b$$

schreiben lässt.
Hinweis: Sie müssen dieses Ausgleichsproblem nicht lösen.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem

$$Ax = b,$$

für

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Hinweis: Eine mögliche Matrix Q für die QR-Zerlegung ist gegeben als

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = Q R$$

$$R: \quad Q \mid A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} I \mid R$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|r\|_2^2$$
$$\|QRx - b\|_2^2 = \|r\|_2^2$$
$$\|Q(Rx - Q^T b)\|_2^2 = \|r\|_2^2 \qquad d = Q^T b$$
$$\|Rx - d\|_2^2 = \|r\|_2^2$$
$$\|R_0 x - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2 = \|r\|_2^2 \qquad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ \hline d_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad R_0 x \overset{!}{=} d_0 \qquad R = \begin{bmatrix} R_0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

$$d_0 = Q^T \cdot b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\2\\-1\end{matrix}}\right\} d_0 \\ \}\, d_1 \end{array}$$

$$x^{!} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = -\frac{1}{4}}} \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{9}{8}}} \quad \underline{\underline{x_1 = -\frac{1}{12}}}$$

3. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

b) Ist A positiv definit? Begründen Sie.

c) Sei $M = \{x | x^T A x = 1\}$. Entspricht M einer Ellipse? Falls ja, geben Sie zusätzlich die Länge der Halbachsen an.

d) Schreiben Sie einen Matlab-Code, der A erstellt sowie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D berechnet, so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

e) Erweitern Sie ihren Matlab-Code aus **d)**, um damit die Matrixexponentialfunktion $B = e^A$ zu berechnen. Die Funktion `expm` darf dabei *nicht* benutzt werden.

4. Sei $\mathcal{P}^k$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $< k$ für $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}^2$ in $\mathcal{P}^3$
$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & \mathcal{P}^2 & \longrightarrow & \mathcal{P}^3 \\ & f(x) & \longmapsto & \int_0^x f(s)ds \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum die Basis 1, x und im Bildraum die Basis 1, x, x^2. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1-x$, $2x$ und im Bildraum die Basis 3, $2x$, x^2. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

5. **a)** Gegeben seien die Funktionen $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = e^{-2x}$. Zeigen Sie, dass f und g linear unabhängig sind.
Hinweis: Es kann auch nur **b)** gezeigt werden, da **a)** aus **b)** folgt.

b) Gegeben seien $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n \geq 0$ und die Funktionen
$$f_1(x) = e^{-\alpha_1 x},\ f_2(x) = e^{-\alpha_2 x},\ \ldots,\ f_n(x) = e^{-\alpha_n x}.$$

Zeigen Sie, dass $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert $x \to \infty$.

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

b) Ist A positiv definit? Begründen Sie.

c) Sei $M = \{x | x^T A x = 1\}$. Entspricht M einer Ellipse? Falls ja, geben Sie zusätzlich die Länge der Halbachsen an.

d) Schreiben Sie einen Matlab-Code, der A erstellt sowie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D berechnet, so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

e) Erweitern Sie ihren Matlab-Code aus **d)**, um damit die Matrixexponentialfunktion $B = e^A$ zu berechnen. Die Funktion `expm` darf dabei *nicht* benutzt werden.

a) $\det(A - \lambda I_2) \overset{!}{=} 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda_1 = 3}} \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 1}}$$

b) Ja, da A eine symmetrische Matrix ist und alle EW ≥ 0 sind!

Es folgen die äquivalenten Aussagen aus dem Theorem:

- A ist s.p.d.
- $\forall i : \lambda_i(A) \geq 0$
- $x^T A x \geq 0$ $\quad x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) Ja, da A s.p.d ist entspricht M einer Ellipse:

Halbachsenlänge 1 $= \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}}$

Halbachsenlänge 2 $= \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \dfrac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

d) A = [2,-1;-1,2];

[T,D] = eig(A);

e) $e^A = T e^D T^{-1}$ $e^D = \begin{bmatrix} e^{d(1)} & & 0 \\ & e^{d(2)} & \\ 0 & & \ddots \, e^{d(n)} \end{bmatrix}$

D1 = D(1,1);

D1e = e^D1;

D2 = D(2,2);

D2e = e^D2;

De = [D1e, 0; 0, D2e];

B = T * De * Inv(T);

4. Sei $\mathcal{P}^k$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $< k$ für $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}^2$ in $\mathcal{P}^3$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \quad \mathcal{P}^2 &\longrightarrow \mathcal{P}^3 \\ f(x) &\longmapsto \int_0^x f(s)ds \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum die Basis 1, x und im Bildraum die Basis 1, x, x^2. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1-x$, $2x$ und im Bildraum die Basis 3, $2x$, x^2. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

a) Bedingungen: 1) $F(a(x)+b(x)) = F(a(x)) + F(b(x))$

2) $F(\alpha a(x)) = \alpha F(a(x))$

=> Kontrolle kombiniert:

$F(a(x)+\beta b(x)) = F(a(x)) + \beta F(b(x))$:

$F(a(x)+\beta b(x)) = \int_0^x (a(s) + \beta b(s))ds$

$= \int_0^x a(s)ds + \beta \int_0^x b(s)ds = F(a(x)) + \beta F(b(x))$ ✓

Noch zeigen ob Abbildung wohldefiniert ist:

$F(1) = x \in P^3, \; F(x) = \frac{1}{2}x^2 \in P^3$ ✓

b) $1 \xrightarrow{F} x \mathrel{\hat{=}} 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x^2 \mathrel{\hat{=}} 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

c) $1 - x \xrightarrow{F} x - \frac{1}{2}x^2 \mathrel{\hat{=}} 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{1}{2}x^2$

$2x \xrightarrow{F} x^2 \mathrel{\hat{=}} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2x + 1 \cdot x^2$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}}$$

5. **a)** Gegeben seien die Funktionen $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = e^{-2x}$. Zeigen Sie, dass f und g linear unabhängig sind.
Hinweis: Es kann auch nur **b)** gezeigt werden, da **a)** aus **b)** folgt.

b) Gegeben seien $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n \geq 0$ und die Funktionen

$$f_1(x) = e^{-\alpha_1 x},\; f_2(x) = e^{-\alpha_2 x},\; \ldots,\; f_n(x) = e^{-\alpha_n x}.$$

Zeigen Sie, dass $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert $x \to \infty$.

a) $e^{-x} x_1 + e^{-2x} x_2 = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$
$\forall x$

$\Rightarrow \frac{1}{e^x} x_1 + \frac{1}{e^{2x}} x_2 = 0 \quad \Big| \; e^{2x}$ dominiert e^x
$\cdot\, e^x$

$= e^x \left(\frac{1}{e^x} x_1 + \frac{1}{e^{2x}} x_2 \right) = 0 \quad \forall x$

$= x_1 + \frac{e^x}{e^{2x}} x_2 = 0 \quad \forall x$

$$\Big\downarrow \; x \to \infty$$

$$x_1 + 0 \; x_2 = 0$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

$$\frac{1}{e^{x}} x_1 + \frac{1}{e^{2x}} x_2 = 0 \qquad \Big| \cdot e^{2x}$$

$$\frac{e^{2x}}{e^{x}} x_1 + x_2 = 0 \qquad \Big| \; x_1 = 0$$

$$\underline{\underline{x_2 = 0}}$$

$\Rightarrow$ e^{-x} & e^{-2x} sind <u>lin. unabhängig</u>!

b) $$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i \stackrel{!}{=} 0 \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \quad \forall x \; ?$$

$$\Leftarrow \quad f_1(x)x_1 + f_2(x)x_2 + \dots + f_j(x)x_j + \dots + f_n(x)x_n = 0$$

$$\Leftarrow \quad \frac{1}{e^{\alpha_1 x}} x_1 + \frac{1}{e^{\alpha_2 x}} x_2 + \dots + \frac{1}{e^{\alpha_j x}} x_j + \dots + \frac{1}{e^{\alpha_n x}} x_n = 0 \qquad \Big| \cdot e^{\alpha_n x}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{e^{\alpha_n x}}{e^{\alpha_1 x}}}_{0} x_1 + \underbrace{\frac{e^{\alpha_n x}}{e^{\alpha_2 x}}}_{0} x_2 + \underbrace{\dots}_{0} + \underbrace{\frac{e^{\alpha_n x}}{e^{\alpha_j x}}}_{0} x_j + \underbrace{\dots}_{0}}_{\text{für } x \to \infty \text{ alles } 0, \text{ da } \alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_j < \dots < \alpha_1} + 1 \cdot x_n = 0 \qquad \Big| \; \forall x \; ?$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_n = 0}}$$

$\Rightarrow$ <u>das gleiche</u> mit $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_j, \dots, x_2, x_1$

einfach jeweils mit dem kleinsten noch übrigen $e^{\alpha_j x}$, $j \in [1, n-1]$ multiplizieren

$\Rightarrow x_n = x_{n-1} = \dots = x_j = \dots = x_2 = x_1 = 0$

$\Rightarrow f_j,\ j \in [1, n]$ sind lin. unabhängig

6. Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen und n Spalten. Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn $m > n$.

c) Falls die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

d) Sei A eine quadratische Matrix. Ist x ein Eigenvektor von A, dann ist x auch ein Eigenvektor von A^3.

e) Die Dimension des Kerns von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

beträgt 2.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) $AB = BA$?

$$\begin{bmatrix} 8 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \times$$

false

b) true

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Problem

c) false, können auch einfach zu wenige sein

d) true, $A^3 \underline{x} = AAAx = AA\lambda x = \lambda AAx = \lambda A \lambda x = \lambda^2 A x = \lambda^3 \underline{x}$

e)
$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow x_4 = t \quad x_3 = s \quad x_2 = -s - 2t \quad x_1 = s$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{true}$$

f)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

false

6. Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen und n Spalten. Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn $m > n$.

c) Falls die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

d) Sei A eine quadratische Matrix. Ist x ein Eigenvektor von A, dann ist x auch ein Eigenvektor von A^3.

e) Die Dimension des Kerns von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

beträgt 2.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$